

数列放缩练习

一、解答题

1. 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n, n \in \mathbf{N}^*$. 设 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $b_1 \neq 0$,

$$2b_n - b_1 = S_1 \cdot S_n, n \in \mathbf{N}^*.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = b_n \cdot \log_3 a_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n ;

(3) 证明: 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \geq 2$, 有 $\frac{1}{a_2 - b_2} + \frac{1}{a_3 - b_3} + \cdots + \frac{1}{a_n - b_n} < \frac{3}{2}$.

2. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$), $\{b_n\}$ 为等比数列, 公比大于 1. 已知

$$a_1 = 1, b_1 = 4, b_2 + S_2 = 11, b_3 + S_3 = 22.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = (-1)^n \frac{(3a_{n+1} - 1)}{a_n(a_n + 1)b_n}$, 求 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和;

(3) 设 $d_n = a_n b_n$, 求证: $\frac{1}{d_2 - d_1} + \frac{1}{d_3 - d_2} + \frac{1}{d_4 - d_3} + \cdots + \frac{1}{d_{n+1} - d_n} < \frac{1}{4}$.

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2} (\forall n \in \mathbf{N}^*)$, 正项数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2} (\forall n \in \mathbf{N}^*)$,

$$\text{且 } 2a_1 = b_1 = 2, a_4 = b_2, b_5 = 4b_3.$$

(1) 求 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 已知 $c_n = \begin{cases} a_{2n-1}, n \text{ 为奇数} \\ \frac{(3a_n - 2)b_n - 2}{(b_n + 1)(b_{n+2} + 1)}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 求: $\sum_{k=1}^{2n+1} c_k$;

(3) 求证: $\frac{1}{a_1^3} + \frac{1}{a_2^3} + \frac{1}{a_3^3} + \cdots + \frac{1}{a_n^3} < \frac{5}{4}$.

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_3 = 12$ 且 $a_4 = 8$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及 S_n ;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{S_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其前 n 项和为 S_n , $a_7=15$, $S_7=63$; 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , $2T_n=3b_n-3(n \in \mathbf{N}^*)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2)求数列 $\left\{\frac{2}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和 Q_n ;

(3)求证: $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{T_i} < 2$.

6. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为2的等差数列, 其前8项和为64. $\{b_n\}$ 是公比大于0的等比数列,
 $b_1=4, b_3-b_2=48$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 记 $c_n=b_{2n}+\frac{1}{b_n}, n \in \mathbf{N}^*$,

(i) 证明 $\{c_n^2-c_{2n}\}$ 是等比数列;

(ii) 证明 $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{a_k a_{k+1}}{c_k^2 - c_{2k}}} < 2\sqrt{2} (n \in \mathbf{N}^*)$

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 和正项等比数列 $\{b_n\}$, $a_1=-5, b_1=2$, a_5 既是 b_3-a_3 与 b_1-a_1 的等差中项, 又是其等比中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) $c_n=|a_n|$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n ;

(3) 证明: $\sum_{i=2}^n \frac{i^2+1}{(i^2-1)b_{i+1}} < \frac{1}{2}$.